Bohmsche Mechanik

Thomas Schlagenhaufen

January 26, 2005

Abstract

Ich geben hier nur einen kurzen qualitativen Einblick in die Bohmsche Mechanik. Den interessierten Leser verweise ich auf die Originalarbeit von David Bohm [2] aus dem Jahre 1952. Diese Arbeit wurde erstmals in [1] von Roman U. Sexl auf Deutsch übersetzt.

1 Einleitung

1.1 Die übliche Deutung der Quantenmechanik

Die übliche Deutung der Quantenmechanik beruht auf der Annahme, daß der Zustand eines Systems durch eine Wellenfunktion vollständigst festgelegt wird, die nur die Wahrscheinlichkeiten von Meßergebnissen festlegt. Ob diese Annahme korrekt ist, kann nur durch den Versuch überprüft werden, eine andere Interpretation der Quantentheorie durch derzeit verborgene Variable zu finden, die im Prinzip das exakte Verhalten eines individuellen Systems bestimmen, aber in der Praxis bei den heutigen Messungen herausgemittelt werden.

Des weiteren gibt sie die Möglichkeit auf, auch nur daran zu denken, was das Verhalten eines individuellen Systems auf dem Quantenniveau bestimmen könnte. Die übliche Deutung hat bisher alle experimentellen Ergebnisse bestätigt, das schließt aber die Möglichkeit nicht aus eine gleichermaßen konsistente Deutung zu finden, die zusätzliche Paramter enthalten würde die eine deterministische Beschreibung ermöglicht. Es war bei allen früheren Verwendungen statistischer Theorien schließlich möglich, die Gesetzte für das Verhalten der individuellen Teile eines statistischen Ensembles durch derartige verborgene Parameter auszudrücken. Falls diese wirklich existieren könnte ein Beharren auf der üblichen Deutung, welche verborgene Parameter prinzipiell auschließt, zu einer langwierigen Fehlentwicklung führen.

1.2 Bohmsche Mechanik

Die Bohmsche Mechanik ist eine deterministische, Galilei-invariante Theorie für die Bewegung von Punktteilchen und macht die gleichen Vorhersagen in Bezug auf Ergebnisse von Experimenten wie die nichtrelativistische Quantenmechanik.

Die Quantenmechanik übernimmt die Rolle eines "phänomenologischen" Meßformalismus der Bohmschen Mechanik, wodurch die Probleme und Paradoxa der Quantenmechanik gelöst werden können.

Um eine Vorstellung von der Dynamik Bohmscher Teilchen zu bekommen, kann man sich folgendes Bild machen. Die Teilchen laufen entlang von Bahnen, wobei ihre Bewegung von einer Welle bestimmt wird. Ähnlich wie Wellenreiter auf einer Wasserwelle werden sie von der Schrödingerschen Wellenfunktion geführt.

2 Eine neue physikalische Deutung der Schrödingergleichung

Die Einteilchen-Schrödingergleichung lautet:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\Psi + V(x)\Psi \tag{1}$$

Die komplexe Funktion Ψ kann ausgedrückt werden als

$$\Psi = Re^{\frac{iS}{\hbar}} \tag{2}$$

wobei R und S reell sind. Man zeigt leicht, daß die Gleichungen für R und S lauten

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left[R\nabla^2 S + 2\nabla R\cdot\nabla S\right] \tag{3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\right] \tag{4}$$

Es ist zweckmäßig auch $P(x) = R^2(x)$ einzuführen, wobei $P(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\cdot\left(P\frac{\nabla S}{m}\right) = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right] = 0 \tag{6}$$

Im klassischen Grenzfall ($\hbar \to 0$) ist die Funktion $S(x)$ eine Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung und wir können $\frac{\nabla S}{m}$ als die Geschwindigkeit $v(x)$ im Punkt x interpretieren. Gleichung (5) kann daher auch in der Form geschrieben werden

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\cdot(P\cdot v) = 0 \tag{7}$$

In diesem Fall kann Pv als Teilchenstrom gedeutet werden und (7) drückt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit aus.

Diese Deutung kann auch für $\hbar \neq 0$ beibehalten werden. Dazu nehmen wir an, daß auf jedes Teilchen nicht nur ein klassisches Potential $V(x)$, sondern auch ein Quantenpotential

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \tag{8}$$

wirkt. Dann kann (6) weiterhin als Hamilton-Jacobi-Gleichung betrachtet werden.

Die Lösung der modifizierten Hamilton-Jacobi-Gleichung (4) gibt ein Ensemble möglicher Bahnkurven, welche aus der Hamilton-Jacobi-Funktion $S(x)$ durch Integration der Geschwindigkeit $v(x) = \frac{\nabla S}{m}$ erhalten werden kann. Aus der Gleichung für S folgt, daß sich das Teilchen unter Wirkung einer Kraft bewegt die sowohl aus einem klassischen, als auch aus einem Quantenpotential (8) folgt.

Da die Kraft auf ein Teilchen nun vom Absolutwert $R(x)$ der Wellenfunktion $\Psi(x)$ abhängt, müssen wir die Wellenfunktion eines Teilchens als mathematische Darstellung eines objektiv realen Feldes betrachten. Dieses Feld übt eine Kraft auf das Teilchen aus. Ebenso wie das elektromagnetische Feld den Maxwell Gleichungen gehorcht, gehorcht das Ψ-Feld der Schrödingergleichung. In beiden Fällen folgt aus einer vollständigen Festlegung des Feldes im gesamten Raum zu einem gegebenen Zeitpunkt die vollständige Zeitentwicklung des Feldes.

2.1 Interpretation der Wahrscheinlichkeitsdichte

Betrachten wir nun die Bedeutung der Annahme eines statistischen Ensembles von Teilchen mit der Wahrscheinlichkeitsdichte von $P(x) = \mid \Psi(x) \mid^2$. Aus Gleichung (5) folgt, daß diese Annahme konsistent ist falls Ψ die Schrödingergleichung erfüllt und $v = \frac{\nabla S}{m}$ gilt. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist numerisch gleich der Wahrscheinlichkeitsdichte, die sich aus der üblichen Interpretation ergibt. In dieser Deutung wird aber die Notwendigkeit einer Wahrscheinlichkeitsdichte als inhärente Eigenschaft der Struktur der Materie betrachtet, während sie in der Bohmschen Mechanik dadurch entsteht, daß wir von einer Messung zur anderen in der Praxis die exakte Lage der Teilchen weder vorhersagen noch kontrollieren können, da der Meßapparat entsprechende unvorhersehbare und unkontrollierbare Störungen hervorruft. Der Gebrauch eines statistischen Ensembles wird als eine Notwendigkeit betrachtet.

2.2 Annahmen für die neue Deutung der Quantentheorie

Die hier vorgeschlagene neue Deutung der Quantentheorie führt also auf einen viel breiteren begrifflichen Rahmen als die übliche Deutung, da alle Ergebnisse der üblichen Interpretation daraus mit Hilfe der folgenden drei wechselseitig konstistenten Annahmen erhalten werden können:

1. Das Ψ-Feld erfüllt die Schrödingergleichung.
2. Der Teilchenimpuls beträgt $p = \nabla S(x)$.
3. Wir können die exakte Lage des Teilchens nicht vorhersagen oder kontrollieren, sondern arbeiten in der Praxis mit der Wahrscheilichkeitsverteilung $P(x) = \mid \Psi(x) \mid ^2$. Die Verwendung der Statistik ist jedoch nicht eine inhärente Eigenschaft der begrifflichen Struktur der Theorie, sondern lediglich eine Konsequenz unserer Unwissenheit über die exakte Anfangslage des Teilchens.

In einer Theorie mit verborgenen Variablen würde man erwarten, daß das Verhalten eines individuellen Systems nicht vom statistischen Ensemble abhängt, dem das System angehört. In dieser Deutung hängt aber das Quantenpotential (8) von der Wellenintensität $P(x)$ ab, die numerisch gleich der Wahrscheinlichkeitsdichte im Ensemble ist. In der Terminologie der üblichen Deutung der Quantentheorie, in der die Wellenfunktion nur als Wahrscheinlichkeit zu deuten ist, erscheint die hier vorgeschlagenen Interpretation als geheimnisvolle Abhängigkeit eines individuellen Systems vom statistischen Ensemble, dem es angehört. In der Bohmschen Mechanik ist eine derartige Abhängigkeit völlig vernünftig, da die Wellenfunktion sowohl als Wahrscheinlichkeitsdichte, als auch als Kraft interpretiert werden kann.

3 Das Doppelspalt-Experiment in der Bohmsche Mechanik

Die Bohmsche Mechanik löst auch den Welle-Teilchen Dualismus im Doppelspalt Experiment. Die Theorie beschreibt die Bewegung eines Teilchens das durch eine Welle, eine Lösung der Schrödingergleichung, geführt wird. Das Interferenzmuster entsteht dadurch, daß sich die Welle durch beide Spalte bewegt, während sich das Teilchen nur durch einen Spalt bewegt.

4 Theoreme über die Unmöglichkeit von Theorien mit versteckten Variablen

Obwohl man sich überzeugen kann, daß die Bohmsche Mechanik existiert, werden manchmal Theoreme, die die Unmöglichkeit von Theorien mit versteckten Variablen beweisen, als Argumente gegen die Bohmsche Mechanik verwendet. Allerdings werden Eigenschaften, die in diesen Theoremen vorausgesetzt werden, von der Bohmschen Mechanik nicht erfüllt.

Dies sind dann wichtige Argumente für die Bohmsche Mechanik. Sie zeigen, daß man die Bohmsche Mechanik hinsichtlich dieser Eigenschaften nicht weiter verbessern kann.

4.1 Die Verletzung der Bell'schen Ungleichung

Eine der wesentlichen Eigenschaften der Bohmschen Mechanik ist ihre Nichtlokalität. Ein Teilchen ist in der Lage, über die Wellenfunktion ein weit entferntes anderes Teilchen sofort, aber kausal, deterministisch, zu beeinflussen. Dies geht nicht ohne ein bevorzugtes Bezugssystem.

Ist dies nun eine spezielle, nicht sehr schöne Eigenschaft der Bohmschen Theorie, die eine verbesserte Bohmsche Theorie nicht mehr haben würde?

Diese Frage beantwortet das Bellsche Theorem hervorragend. Jede Theorie, die einerseits kausal-realistisch ist und in der die Einstein-Kausalität gilt, gilt auch die Bellsche Ungleichung. Deren Verletzung beweist, daß in jeder Theorie, die kausal und realistisch ist wie die Bohmsche Theorie, die Einstein-Kausalität nicht gelten kann.

Hierbei darf man allerdings nicht zwei verschiedene Begriffe von Einstein-Kausalität verwechseln. Einerseits die realistische Einstein-Kausalität, hier sind die realen Abhängigkeiten Einstein-kausal. Andererseits die phänomenologische Einstein-Kausalität, in der lediglich wichtig ist, ob ein Beobachter beobachtbare Effekte zur Informationsübertragung schneller als Licht verwenden kann. In diesem zweiten, schwächeren Sinn ist auch die Bohmsche Mechanik Einstein-kausal.

4.2 Das Kochen-Specker Theorem

Ein anderes bekanntes Unmöglichkeitstheorem von Kochen und Specker verlangt die Kontextunabhängigkeit der quantenmechanischen Observablen. In der Bohmschen Mechanik sind allerdings nur die Koordinaten der Teilchen kontextunabhängig. Alle anderen Meßungen (Impuls, Energie, Spin) sind hingegen kontextabhängig, die Meßergebnisse hängen auch vom Zustand des Meßgerätes ab, und sind in diesem Sinn gar keine Messungen, sondern Ergebnisse von Wechselwirkungen.

References

[1] **Kurt Baumann, Roman U. Sexl,** *Die Deutungen der Quantentheorie,* Vieweg (1987), ISBN: 3-528-28540-0

[2] **David Bohm,** *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables,* Rev. Mod. Phys.38, 447-452 (1966)

[3] Arbeitsgruppe Bohmsche Mechanik der Uni München http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/BohmHome/bmstart.htm